Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du BTS MOS, veuillez visiter :
bts-mos.fr/annales-sujets-et-corriges

# Mathématiques

**Session 2023** • Code sujet : **23MATGRD1** • Durée : **Non indiquée sur les pages fournies**

## Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement


**1. Évolution de la température de l'eau d'un spa** (12 questions) **Page 3**

**2. Contrôles qualité du blé, masse des sacs et étude de clientèle** (12 questions) **Page 7**

**3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**


**Sujet officiel (PDF) :** https://bts-mos.fr/assets/annales/bts-mos/E2 - Mathématiques/2023/BTS MOS - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 3-Sujet.pdf

# 1. Évolution de la température de l'eau d'un spa

Après avoir porté l'eau du spa à 38 °C, on coupe le chauffage et on modélise sa température au cours du temps par une équation différentielle. La température extérieure reste à 25 °C, et les questions portent sur le modèle, son évolution, une alarme et un algorithme.

## Partie A

**Question 1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle y' + 0,05y = 0 sur l'intervalle [0 ; +∞[.**

L'équation homogène s'écrit $y' = -0,05y$, soit une équation différentielle de la forme $y' = ay$. Ses solutions sont les fonctions exponentielles $y(t) = Ce^{at}$, où $C$ est une constante réelle. En prenant ici $a = -0,05$, on obtient la famille complète des solutions sur l'intervalle demandé. Aucune condition initiale n'est imposée dans cette question.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Sur $[0; +\infty[$, toutes les solutions sont $y(t) = Ce^{-0,05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

**Question 2. Déterminer, sur [0 ; +∞[, une fonction constante solution particulière de l'équation différentielle y' + 0,05y = 1,25.**

Pour chercher une solution constante, on pose $y(t) = k$, avec $k$ réel. Sa dérivée est nulle, donc l'équation devient $0,05k = 1,25$. On en déduit $k = 1,25/0,05 = 25$. La fonction constante ainsi obtenue satisfait l'équation différentielle pour tout $t$ de l'intervalle considéré.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Une solution particulière constante de l'équation est $y(t) = 25$, pour tout $t \in [0; +\infty[$.

**Question 3. En déduire les solutions de l'équation différentielle y' + 0,05y = 1,25.**

Une solution de l'équation avec second membre s'obtient en ajoutant une solution particulière aux solutions de l'équation homogène associée. La solution particulière trouvée est la constante 25, et les solutions homogènes sont $Ce^{-0,05t}$. Leur somme donne donc toutes les solutions de l'équation différentielle sur $[0; +\infty[$, quel que soit le réel $C$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les solutions sont $y(t) = Ce^{-0,05t} + 25$, où $C$ est une constante réelle quelconque.

**Question 4. Montrer que, pour tout réel t de [0 ; +∞[, f(t) = 13e$^{-0,05t}$ + 25.**

La solution générale obtenue précédemment s'écrit $f(t) = Ce^{-0,05t} + 25$. La condition initiale impose $f(0) = 38$. Comme $e^0 = 1$, on a alors $C + 25 = 38$, donc $C = 13$. En remplaçant la constante dans l'expression générale, on établit la formule demandée pour tout réel $t \geq 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La condition initiale donne $C = 13$, donc $f(t) = 13e^{-0,05t} + 25$ pour tout $t \geq 0$.

## Partie B

**Question 1. Calculer f(24), arrondie au dixième, puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.**

On évalue le modèle au temps $t = 24$ heures : $f(24) = 13e^{-0,05\times 24} + 25 = 13e^{-1,2} + 25 \approx 28,9155$. L'arrondi au dixième donne $28,9$ °C. Cette température correspond à celle que le modèle prévoit pour l'eau du spa 24 heures après la coupure de son alimentation électrique.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Après 24 heures, la température de l'eau est estimée à $28,9\ ^\circ\text{C}$, au dixième de degré près.

**Question 2. a). Déterminer une expression de f'(t) pour tout réel t de [0 ; +∞[.**

On dérive l'expression $f(t) = 13e^{-0,05t} + 25$. La dérivée du terme constant est nulle. Pour l'exponentielle, on applique la dérivation d'une fonction composée : la dérivée de $e^{-0,05t}$ est $-0,05e^{-0,05t}$. En multipliant par 13, on obtient l'expression de $f'(t)$ valable pour tout $t \geq 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour tout $t \geq 0$, la dérivée est $f'(t) = -0,65e^{-0,05t}$.

**Question 2. b). Déduire le sens de variation de f sur [0 ; +∞[, puis dire s'il paraît cohérent avec le contexte et argumenter.**

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0,05t}$ est strictement positive. Comme son coefficient dans $f'(t) = -0,65e^{-0,05t}$ est négatif, on a $f'(t) < 0$ sur l'intervalle. Ainsi, $f$ est strictement décroissante. Cette évolution est cohérente avec la situation : le chauffage est coupé, donc l'eau refroidit vers la température ambiante.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La température modélisée décroît strictement après la coupure, ce qui est cohérent avec le refroidissement du spa.

**Question 3. a). Déterminer la limite de f en +∞.**

Lorsque $t$ tend vers $+\infty$, l'exposant $-0,05t$ tend vers $-\infty$. Par conséquent, $e^{-0,05t}$ tend vers 0. Dans la formule $f(t) = 13e^{-0,05t} + 25$, le terme exponentiel s'annule donc à la limite, tandis que le terme constant reste égal à 25. La limite de $f$ est ainsi déterminée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La limite de la température modélisée lorsque $t$ tend vers $+\infty$ est $25$.

**Question 3. b). Interpréter la valeur de cette limite dans le contexte de l'exercice.**

La valeur de la limite représente la température vers laquelle l'eau du spa se rapproche après une longue durée sans chauffage. Le modèle indique que cette température tend vers 25 °C. Cela correspond à la température extérieure, que l'énoncé suppose constante pendant la vérification.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> À long terme, l'eau du spa se rapproche de la température ambiante, soit $25\ ^\circ\mathrm{C}$.

**Question 4. a). Une alarme se déclenche lorsque la température devient strictement inférieure à la température programmée. Pour un réglage à 36 °C, déterminer par le calcul le temps écoulé depuis la coupure avant le déclenchement, donner la valeur exacte puis l'arrondir à la minute.**

Le seuil est atteint lorsque $f(t) = 36$. On résout $13e^{-0,05t} + 25 = 36$, d'où $e^{-0,05t} = 11/13$, puis $t = 20\ln(13/11)$ heures. La température devient strictement inférieure à 36 °C juste après cet instant. Cette durée vaut environ $200,465$ minutes, soit 200 minutes à la minute près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Le seuil est atteint à $20\ln(13/11)$ h, soit environ 3 h 20 min à la minute près.

**Question 4. b). Déterminer la valeur numérique affichée par l'algorithme qui initialise H à 0 et T à 38, puis augmente H d'une heure et calcule T = 13e$^{-0.05H}$ + 25 tant que T ≥ 34.**

À chaque passage dans la boucle, $H$ augmente d'une heure et la température est recalculée. Pour $H = 7$, on obtient $T \approx 34,161$ °C : la condition $T \geq 34$ reste vérifiée. À $H = 8$, $T \approx 33,714$ °C, donc la boucle s'arrête. L'algorithme affiche alors la valeur de $H$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Après l'arrêt de la boucle, la valeur affichée par l'algorithme est $H = 8$.

**Question 4. c). Expliquer ce que l'algorithme permet de déterminer dans le contexte de l'exercice.**

L'algorithme commence à l'instant de la coupure, puis vérifie la température pour des durées entières exprimées en heures. Il augmente $H$ tant que la température calculée est supérieure ou égale à 34 °C. Il s'arrête au premier entier où elle devient strictement inférieure à ce seuil. Il repère donc le premier nombre entier d'heures correspondant à ce passage.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'algorithme détermine le premier nombre entier d'heures après lequel la température passe sous $34\ ^\circ\mathrm{C}$.

## 2. Contrôles qualité du blé, masse des sacs et étude de clientèle

Une minoterie contrôle l'extensibilité de pâtes fabriquées à partir du blé livré et le taux d'humidité de lots à mélanger. L'exercice traite ensuite de la masse des sacs de farine et des probabilités associées aux clients susceptibles de tester une nouvelle farine.

### Partie A

**Question 1. a). À partir des indices d'extensibilité des cinq échantillons de pâte, donner la moyenne de la série et son écart-type arrondi au centième.**

Les cinq indices sont 104, 81, 83, 57 et 55 mm. Leur moyenne vaut $\bar{x} = (104 + 81 + 83 + 57 + 55)/5 = 76$ mm. La somme des carrés des écarts à la moyenne est 1660, donc l'écart-type de la série est $\sigma = \sqrt{1660/5} = \sqrt{332} \approx 18,22$ mm.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Moyenne : 76 mm ; écart-type : 18,22 mm.

**Question 1. b). En prenant l'écart-type de la série égal à 18 mm, vérifier qu'aucune des cinq valeurs ne se trouve en dehors de l'intervalle [x̄ − 2σ ; x̄ + 2σ] et confirmer que le technicien n'a pas besoin de tester cinq nouveaux échantillons.**

Avec $\bar{x} = 76$ mm et $\sigma = 18$ mm, l'intervalle vaut $[76 - 2 \times 18\ ;\ 76 + 2 \times 18] = [40\ ;\ 112]$ mm. Les cinq indices, compris entre 55 et 104 mm, appartiennent tous à cet intervalle. Aucune mesure n'est à l'extérieur : le technicien n'a donc pas besoin de tester cinq nouveaux échantillons.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les cinq valeurs sont dans [40 ; 112] mm : aucun nouveau test n'est nécessaire.

**Question 2. À partir des masses et taux d'humidité des deux camions, montrer que le technicien peut autoriser leur déchargement dans un même silo, sachant que le taux d'humidité du mélange doit être inférieur à 13 %.**

Le taux d'humidité du mélange est pondéré par les masses de blé : $\frac{29540 \times 12,4 + 14540 \times 14,1}{29540 + 14540} \approx 12,961$ %. Le mélange respecte donc l'exigence du cahier des charges, car son taux est strictement inférieur à 13 %. Le technicien peut autoriser le déchargement des deux camions dans le même silo vide.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Humidité du mélange : environ 12,961 % ; déchargement autorisé.

## Partie B

**Question 1. La masse X d'un sac suit une loi normale de moyenne 25,2 kg et d'écart-type 0,1 kg. Un sac ne peut pas être vendu si sa masse est inférieure à 25 kg. Calculer, à $10^{-3}$ près, la probabilité qu'un sac ait une masse inférieure à 25 kg.**

On centre et réduit la variable : $Z = \frac{X-25,2}{0,1}$ suit la loi normale centrée réduite. Pour une masse de 25 kg, $z = (25-25,2)/0,1 = -2$. La table de la loi normale donne $P(Z < -2) \approx 0,0228$, soit 0,023 à $10^{-3}$ près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(X < 25) \approx 0,023$.

**Question 2. a). Donner un réel h tel que P(25,2 − h ≤ X ≤ 25,2 + h) soit approximativement égale à 0,95, à $10^{-2}$ près.**

Pour une loi normale, l'intervalle centré sur la moyenne qui contient environ 95 % des valeurs a un rayon égal à environ 1,96 écart-type. Ici, $h \approx 1,96 \times 0,1 = 0,196$ kg, ce qui s'arrondit au centième à 0,20 kg.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $h = 0,20$ kg.

**Question 2. b). À partir de la représentation graphique donnée d'une fonction de densité, expliquer pourquoi cette représentation ne peut pas être celle de la fonction de densité de X.**

Pour la variable $X$, environ 95 % des masses doivent se trouver dans l'intervalle centré sur 25,2 kg de rayon $1,96 \times 0,1 = 0,196$ kg, soit environ [25,004 ; 25,396] kg. Or le graphique montre une courbe étalée sur plusieurs kilogrammes. Cette largeur est incompatible avec un écart-type de seulement 0,1 kg.

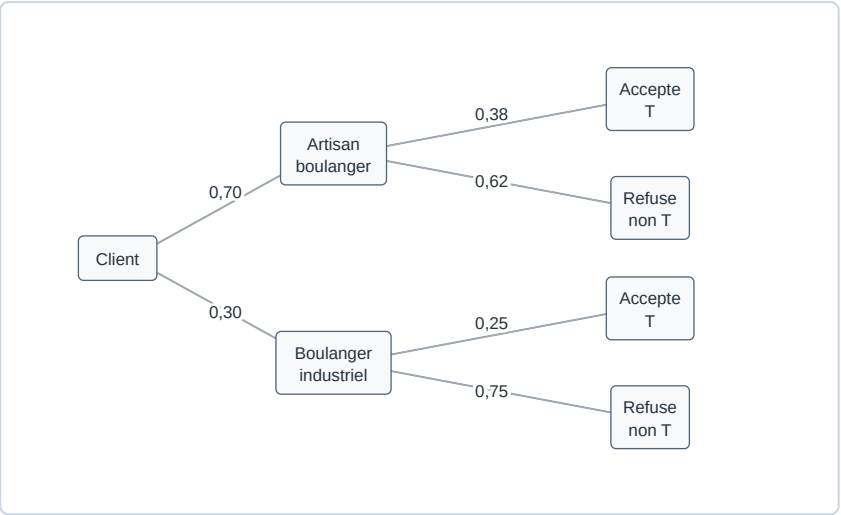
> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La courbe est trop étalée : environ 95 % des masses doivent être entre 25,004 kg et 25,396 kg.

## Partie C

**Question 1. Représenter par un arbre pondéré la situation décrite, distinguant le type de client et son acceptation ou non de tester la farine La Romaine.**

On note $A$ l'événement « artisan boulanger » et $T$ l'événement « accepte de tester La Romaine ». Les probabilités des branches de deuxième niveau sont conditionnelles au type de client. Les probabilités de refus sont les complémentaires des probabilités d'acceptation.

**Type de client et acceptation du test**




A : artisan boulanger ; T : accepte de tester La Romaine.

**✓ RÉPONSE À RETENIR**

Arbre pondéré des types de clients et de leur acceptation ou refus du test.

**Question 2. a). Calculer la probabilité que le client soit un artisan boulanger et accepte de tester la farine La Romaine.**

Le chemin correspondant à l'événement demandé est « artisan boulanger », puis « accepte le test ». On multiplie donc la probabilité d'être artisan par la probabilité conditionnelle d'accepter : $P(A \cap T) = P(A) \times P_A(T) = 0,70 \times 0,38 = 0,266$.

**✓ RÉPONSE À RETENIR**

$P(A \cap T) = 0,266$.

**Question 2. b). Montrer que la probabilité qu'un client accepte de tester la farine La Romaine est égale à 0,341.**

Les deux types de clients couvrent tous les cas et sont incompatibles. On additionne donc les probabilités des chemins d'acceptation : $P(T) = 0,70 \times 0,38 + 0,30 \times 0,25 = 0,266 + 0,075 = 0,341$. La probabilité qu'un client accepte de tester la farine est bien celle demandée.

**✓ RÉPONSE À RETENIR**

$P(T) = 0,341$.

**Question 3. Sachant qu'un client a testé la farine La Romaine, calculer, à $10^{-3}$ près, la probabilité que ce client soit un artisan boulanger.**

La probabilité qu'un client soit artisan sachant qu'il a testé la farine est $P(A \mid T) = \frac{P(A \cap T)}{P(T)}$. Ainsi, $P(A \mid T) = 0,266/0,341 \approx 0,780$, à $10^{-3}$ près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A \mid T) \approx 0,780$.

**Question 4. a). La variable Y suit une loi binomiale de paramètres n = 200 et p = 0,341. Calculer, à $10^{-3}$ près, la probabilité qu'au plus 60 des 200 clients choisis aient testé la farine La Romaine.**

Pour $Y \sim \mathcal{B}(200; 0,341)$, l'événement « au plus 60 clients » est $Y \leq 60$. Sa probabilité est $\sum_{k=0}^{60} \binom{200}{k} (0,341)^k (0,659)^{200-k}$, soit environ 0,125 à $10^{-3}$ près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(Y \leq 60) \approx 0,125$.

**Question 4. b). Calculer l'espérance de Y et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.**

Pour une loi binomiale, l'espérance vaut $E(Y) = np$. Ici, $E(Y) = 200 \times 0,341 = 68,2$. Sur un grand nombre d'échantillons de 200 clients, le nombre moyen de clients ayant testé La Romaine est donc de 68,2.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(Y) = 68,2$ clients en moyenne.

# Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

**Bilan de l'épreuve :** Épreuve de mathématiques du BTS, session 2023, code 23MATGRD1. La durée et le coefficient ne figurent pas sur les pages fournies. Le sujet étudie le refroidissement d'un spa, puis des contrôles de qualité en minoterie, la loi normale et les probabilités liées à une clientèle, notamment avec une loi binomiale.

### Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y' + ay = b$, avec $a$ non nul et $b$ constant, les solutions sont de la forme $y(t) = Ce^{-at} + b/a$.
- Le taux d'humidité d'un mélange se calcule par une moyenne pondérée des taux, les masses des lots servant de poids.
- Pour une loi normale, environ 95 % des valeurs sont comprises entre $\mu - 1{,}96\sigma$ et $\mu + 1{,}96\sigma$.
- Pour Y suivant une loi binomiale B(n,p), son espérance vaut np et $P(Y \leq k)$ est une probabilité cumulée.

### Points de vigilance & attentes du jury

- Utiliser la condition initiale $f(0) = 38$ pour déterminer la constante du modèle différentiel.
- Pour le mélange des camions, pondérer les taux d'humidité par les masses et comparer le résultat à 13 %.
- Distinguer la probabilité conjointe de l'événement et la probabilité conditionnelle demandée après un test.
- Respecter les précisions d'arrondi et donner une interprétation contextualisée avec les unités utiles.

## Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

**Q : Comment résoudre l'équation différentielle du modèle du spa ?**
Résolvez d'abord l'équation homogène, puis cherchez une solution particulière constante. Additionnez-les pour obtenir la solution générale et utilisez $f(0) = 38$ pour déterminer la constante.

**Q : Comment traiter l'humidité après le mélange des deux camions ?**
Multipliez la masse de chaque camion par son taux d'humidité pour obtenir la masse d'eau correspondante. Additionnez ces masses d'eau, puis divisez par la masse totale de blé et exprimez le résultat en pourcentage.

**Q : Comment organiser le travail dans cette épreuve ?**
Les deux parties de l'exercice sur le spa peuvent être traitées indépendamment, tout comme les trois parties sur la minoterie. Les pages fournies ne précisent pas la durée : avancez sur les questions maîtrisées et gardez du temps pour vérifier les calculs.

**Q : Quelles précautions prendre pour répondre selon les attentes du jury ?**
Présentez une démarche justifiée, gardez des valeurs non arrondies pendant les calculs et arrondissez seulement au degré de précision demandé. Ajoutez une interprétation dans le contexte lorsque la consigne le demande.

**Sujet officiel associé (PDF) :** https://bts-mos.fr/assets/annales/bts-mos/E2 - Mathématiques/2023/BTS MOS - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 3-Sujet.pdf
**Ressources BTS Management Opérationnel de la Sécurité :** Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.