Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du BTS MOS, veuillez visiter :
bts-mos.fr/annales-sujets-et-corriges

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 pour Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 pour Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction** (12 questions) **Page 3**

2. **Séries de Fourier d'une fonction périodique paire** (10 questions) **Page 8**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://bts-mos.fr/assets/annales/bts-mos/E2 - Mathématiques/2023/BTS MOS - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance entre le fond du tiroir et celui du meuble est modélisée par une fonction f du temps, exprimée en centimètres. L'étude mobilise une équation différentielle, les variations de f, un algorithme de seuil et le calcul de la position moyenne sur quatre secondes.

Partie A

Question 1.a. Résoudre l'équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

On cherche les valeurs de r qui annulent le trinôme. La factorisation est directe :

$$r^2 + 5r + 4 = (r + 1)(r + 4).$$

Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul. Le premier facteur s'annule pour $r = -1$, le second pour $r = -4$. On peut vérifier qu'il s'agit bien de deux racines distinctes, car le discriminant vaut $25 - 16 = 9$, donc il est strictement positif.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les deux solutions réelles distinctes sont $r_1 = -1$ et $r_2 = -4$.

Question 1.b. À l'aide du tableau fourni, résoudre l'équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0.

L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle est celle de la question précédente. Elle possède deux racines réelles distinctes : $r_1 = -1$ et $r_2 = -4$. Le tableau fourni indique alors que toute solution est une combinaison linéaire des exponentielles correspondantes. Les constantes réelles C_1 et C_2 sont arbitraires. Cette expression donne l'ensemble des solutions sur l'intervalle considéré.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2.a. À l'instant t = 0, le point M est à 20 cm de O et se déplace vers O à la vitesse de -10 cm·s⁻¹. En déduire f(0) et f'(0).

Grandeur à $t = 0$	Donnée	Valeur correspondante
Distance OM	20 cm	$f(0) = 20$
Vitesse du point M	-10 cm·s^{-1}	$f'(0) = -10$

La fonction f donne la distance au point O, donc la distance initiale est sa valeur en zéro. La dérivée représente la vitesse de variation de cette distance. Le signe négatif correspond au rapprochement du point M vers le point O, conformément à l'énoncé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}.

Question 2.b. Sachant que f(t) = (70/3)e^{-t} - (10/3)e^{-4t}, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.

La distance demandée correspond à la valeur de la fonction à l'instant $t = 2$. On remplace donc t par 2 dans l'expression fournie :

$$f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-4\times 2} = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}.$$

Cette forme exacte est exprimée en centimètres. À titre de contrôle, sa valeur approchée est d'environ $3,157$ cm.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Après 2 secondes, la distance exacte est $\frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm.

Question 2.c. Le tiroir est dit fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Vérifier, en justifiant, si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes.

On évalue la distance au bout de 4 secondes :

$$f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0,427 \text{ cm}.$$

Cette valeur est inférieure au seuil de $0,5$ cm. De plus, la fonction est continue et décroissante sur l'intervalle considéré : elle part de 20 cm et atteint moins de $0,5$ cm avant 4 secondes. Le seuil est donc franchi strictement avant cet instant.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Oui, le constructeur a raison : la distance devient inférieure à $0,5$ cm avant 4 secondes.

Partie B

Question 1.a. Sachant que lim e^{-u} = 0 lorsque u tend vers +∞, déterminer lim f(t) lorsque t tend vers +∞.

Sur l'intervalle considéré, $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, les nombres t et $4t$ tendent eux aussi vers $+\infty$. Ainsi, e^{-t} et e^{-4t} tendent vers 0. Les coefficients étant constants, chacun des deux termes de $f(t)$ tend vers 0, donc leur différence tend également vers 0.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0.$

Question 1.b. Déduire de la limite précédente que la courbe C représentative de f possède une asymptote, et en donner une équation.

La limite obtenue à la question précédente est finie. Par définition, si une fonction tend vers une valeur L lorsque t tend vers $+\infty$, sa courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = L$. Ici, la limite vaut 0. La droite correspondante est l'axe des abscisses, que la courbe approche lorsque le temps devient grand.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'asymptote horizontale de C a pour équation $y = 0$.

Question 2.a. Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.

On dérive chaque terme en utilisant $(e^{at})' = ae^{at}$. Pour le premier terme, la dérivée de e^{-t} est $-e^{-t}$. Pour le second, la dérivée de $-\frac{10}{3}e^{-4t}$ est positive, car les deux signes négatifs se compensent :

$$f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}.$$

Cette expression est valable pour tout $t \geq 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour tout $t \geq 0$, $f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2.b. Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, déduire le tableau de variations de f sur cet intervalle.

t	**0**	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	
Variation de f	20	$\searrow$ 0

Comme $f'(t) < 0$ sur l'intervalle, f y est strictement décroissante. À l'origine, $f(0) = \frac{70}{3} - \frac{10}{3} = 20$. À l'autre extrémité, la fonction tend vers 0. Le tableau indique donc une décroissance de 20 vers 0.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît strictement de 20 vers 0 sur $[0; +\infty[$.

Question 3.a. **Compléter le tableau de suivi de l'algorithme à partir de la ligne 36, en ajoutant les lignes nécessaires jusqu'à son arrêt. Pour chaque ligne, indiquer la valeur de f(t), arrondie à 10^{-2}, et si la condition $(70/3)e^{-t} - (10/3)e^{-4t} > 0{,}5$ est vraie ou fausse.**

La boucle augmente t de $0,1$ tant que $f(t) > 0,5$. On calcule les valeurs demandées, arrondies au centième, puis on teste la condition sans arrondir la valeur de $f(t)$:

Ligne	t	$f(t)$**, au centième**	**Condition** $f(t) > 0,5$
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

La ligne 39 est nécessaire pour constater l'arrêt de l'algorithme.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La condition devient fausse à la ligne 39, pour $t = 3,9$.

Question 3.b. **Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de la fermeture du tiroir.**

L'algorithme s'arrête à la première valeur de t pour laquelle la distance n'est plus supérieure à $0,5$ cm. D'après le tableau, la condition est vraie à $3,8$ s, puis fausse à $3,9$ s. La variable t vaut donc $3,9$ à la fin de l'exécution. À cet instant, la distance est d'environ $0,47$ cm, donc le tiroir est fermé selon la définition de l'énoncé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$t = 3,9$ s : la distance est inférieure à $0,5$ cm et le tiroir est fermé.

Question 4. **La position moyenne du tiroir sur l'intervalle [0 ; 4] est définie par $m = 1/4 \int_0^4 f(t)dt$. Démontrer que $m = 45/8 - (35/6)e^{-4} + (5/24)e^{-16}$.**

Une primitive de f est $F(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}$. Ainsi,

$$m = \frac{1}{4}\left[F(4) - F(0)\right].$$

En remplaçant les bornes, on obtient

$$m = \frac{1}{4}\left(-\frac{70}{3}e^{-4} + \frac{5}{6}e^{-16} + \frac{70}{3} - \frac{5}{6}\right).$$

En regroupant les termes constants et les termes exponentiels, on retrouve l'expression demandée.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$m = \frac{45}{8} - \frac{35}{6}e^{-4} + \frac{5}{24}e^{-16}$ cm.

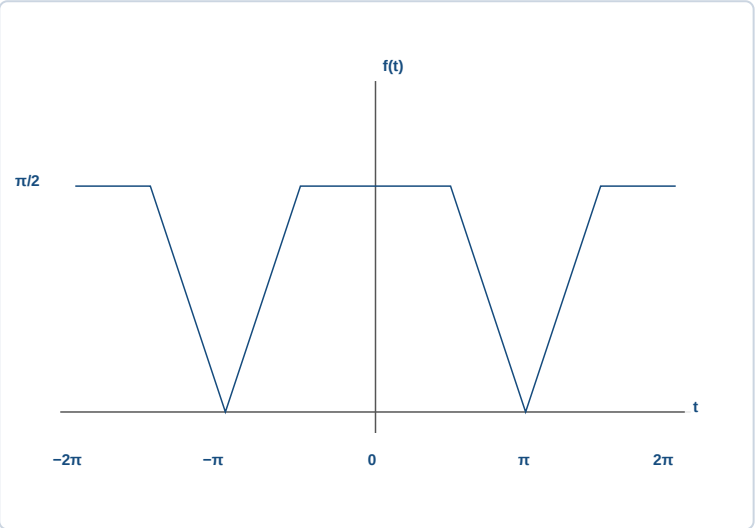
2. Séries de Fourier d'une fonction périodique paire

La fonction f est paire, de période 2π, et définie par morceaux sur [0 ; π] : elle vaut π/2 sur [0 ; π/2[, puis π - t sur [π/2 ; π]. L'exercice demande d'établir ses coefficients de Fourier, d'étudier la somme partielle d'ordre 3 et d'évaluer l'erreur d'une approximation de sa valeur efficace.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle [-2π ; 2π].

Sur une période, la fonction est paire : elle reste égale à $\pi/2$ de $-\pi/2$ à $\pi/2$, puis descend linéairement jusqu'à 0 en π. La périodicité de période 2π répète ce motif sur $[-2\pi; 2\pi]$. Les paliers et les segments obliques sont tracés ci-dessous.

Graphe de f sur [-2π ; 2π]



> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Graphe pair et périodique, de palier $\pi/2$ et de minima nuls en $t = \pm\pi$.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient de Fourier b_n est nul.

Sur $[-\pi; \pi]$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$. La fonction f est paire et $t \mapsto \sin(nt)$ est impaire. Leur produit est donc impair, et son intégrale sur cet intervalle symétrique est nulle. Ainsi, pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = 0$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = 0$.

Question 3. Déterminer la pulsation ω associée à la fonction f.

La période est $T = 2\pi$. D'après le formulaire, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, donc $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\omega = 1$ radian par unité de temps.

Question 4. Démontrer que le coefficient a_0 est égal à $3\pi/8$.

Le coefficient constant est la moyenne sur une période. Comme f est paire, $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt$. L'aire sous la courbe vaut $\frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{2} + \int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\,dt = \frac{3\pi^2}{8}$. Ainsi, $a_0 = \frac{3\pi}{8}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_0 = \frac{3\pi}{8}$.

Question 5. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $a_n = \int_0^{(\pi/2)} \cos(nt)dt + (2/\pi)\int_{(\pi/2)}^{\pi} (\pi - t)\cos(nt)dt$.

Pour une fonction paire, le formulaire donne $a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt$. Avec $T = 2\pi$ et $\omega = 1$, cela devient $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$. On sépare l'intégrale aux bornes des deux expressions de f : le premier morceau, où $f(t) = \pi/2$, donne le premier terme demandé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_n = \int_0^{\pi/2}\cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\,dt$.

Question 6. On admet que $a_n = 2/(\pi n^2)(\cos(n\pi/2) - \cos(n\pi))$. Déterminer les valeurs exactes de a_1, a_2 et a_3.

On remplace successivement n par 1, 2 et 3 dans la formule admise. Les différences $\cos(n\pi/2) - \cos(n\pi)$ valent respectivement 1, -2 et 1. On obtient :

Coefficient	Valeur exacte
a_1	$\frac{2}{\pi}$
a_2	$-\frac{1}{\pi}$
a_3	$\frac{2}{9\pi}$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_1 = \frac{2}{\pi}$, $\quad a_2 = -\frac{1}{\pi}$, $\quad a_3 = \frac{2}{9\pi}$.

Question 7. Déduire des résultats précédents l'expression de $s_3(t) = 3\pi/8 + (2/\pi)\cos(t) - (1/\pi)\cos(2t) + (2/(9\pi))\cos(3t)$.

La somme partielle d'ordre 3 est $s_3(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{3}(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt))$. Les coefficients sinus sont nuls. En remplaçant les autres coefficients par les valeurs obtenues aux questions précédentes, on retrouve l'expression de s_3.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t)$.

Question 8. Parmi les trois courbes proposées, indiquer sans justification celle qui correspond à la fonction s_3.

La somme s_3 est paire et périodique. Sa courbe est lisse, avec un creux près de $t = \pm\pi$ et une partie haute autour de $t = 0$. Parmi les trois tracés proposés, ces caractéristiques correspondent à la courbe numéro 3.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Courbe numéro 3.

Question 9.a. On note $P = (a_0)^2 + 1/2[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2]$. Donner une valeur approchée de P à 10^{-4} près.

En substituant les coefficients, $P = (3\pi/8)^2 + \frac{1}{2}((2/\pi)^2 + (-1/\pi)^2 + (2/(9\pi))^2) = \frac{9\pi^2}{64} + \frac{409}{162\pi^2}$. L'évaluation donne environ $1{,}64371784$, soit $1{,}6437$ à 10^{-4} près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P \approx 1{,}6437$.

Question 9.b. On admet que la valeur efficace F vérifie $F^2 = \pi^2/6$ et que P constitue une approximation de F^2. Choisir, sans justification, le pourcentage d'erreur parmi 0,1 %, 1 % et 10 %. Une seule réponse est attendue.

L'erreur relative vaut $\frac{|P - F^2|}{F^2} \times 100$. Avec $P \approx 1{,}64371784$ et $F^2 = \frac{\pi^2}{6}$, elle est d'environ $0{,}0739\,\%$. Le choix correspondant est donc $0{,}1\,\%$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $0{,}1\,\%$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2023, code 23MATGRB2, dure 2 heures. Son coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Elle évalue la résolution d'une équation différentielle et l'étude de la fermeture d'un tiroir, puis les séries de Fourier d'une fonction paire et l'approximation de sa valeur efficace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y'' + 5y' + 4y = 0$, les racines de $r^2 + 5r + 4 = 0$ déterminent la solution générale.
- Si $f'(t) < 0$, f est décroissante ; une limite finie à l'infini donne une asymptote horizontale.
- Pour une fonction paire de période T, $b_n = 0$ et $a_n = 4/T$ $\int_0^{(T/2)} f(t)\cos(n\omega t)dt$.
- La somme partielle d'ordre n est $s_n(t) = a_0 + \Sigma_{k=1}^{n}(a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t))$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Distinguer la distance OM, exprimée en centimètres, du temps t, exprimé en secondes.
- Pour le seuil de fermeture, appliquer strictement la condition OM < 0,5 cm.
- Dans l'algorithme, suivre les pas de 0,1 et tester la condition de boucle à chaque valeur.
- Pour Fourier, exploiter la parité, conserver les valeurs exactes demandées et respecter les arrondis indiqués.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment trouver la solution générale de l'équation différentielle du tiroir ?

Résoudre l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$, puis associer à ses racines la forme de solution indiquée dans le tableau. Les conditions initiales servent ensuite à déterminer les constantes.

Q : Pourquoi les coefficients b_n sont-ils nuls dans l'exercice de Fourier ?

La fonction f est paire et sin(nωt) est impaire. Leur produit est impair, donc son intégrale sur un intervalle symétrique est nulle ; ainsi, les coefficients b_n sont tous nuls.

Q : Comment remplir le tableau de l'algorithme sans perdre le fil ?

Partir de t = 0, ajouter 0,1 à chaque itération, calculer f(t), puis évaluer si f(t) > 0,5. L'algorithme s'arrête dès que cette condition devient fausse.

Q : Quels arrondis et consignes de réponse faut-il respecter ?

Le tableau de l'algorithme demande f(t) arrondie à 10^{-2} et P à 10^{-4} près. Les coefficients demandés sont exacts ; pour la question à choix multiples, recopier une seule réponse sans justification.

Sujet officiel associé (PDF) : https://bts-mos.fr/assets/annales/bts-mos/E2 - Mathématiques/2023/BTS MOS - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Management Opérationnel de la Sécurité : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.