Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du BTS MOS, veuillez visiter :
bts-mos.fr/annales-sujets-et-corriges

# Mathématiques

**Session 2022** • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

## Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Modélisation du freinage d'un chariot de fête foraine** (12 questions) — **Page 3**

2. **Transformées de Laplace d'un système électrique entrée-sortie** (9 questions) — **Page 7**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 11**

**Sujet officiel (PDF) :** https://bts-mos.fr/assets/annales/bts-mos/E2 - Mathématiques/2022/BTS MOS - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

# 1. Modélisation du freinage d’un chariot de fête foraine

Un chariot lancé à 20 m·s⁻¹ est ralenti par un système de freinage, et sa vitesse est modélisée par une fonction du temps. L’exercice étudie cette fonction par une équation différentielle, ses variations et sa limite, puis une primitive et un développement limité.

## Partie A - Résolution d'une équation différentielle

**Question 1. a. Résoudre l’équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0 sur l’intervalle considéré.**

La formule des solutions de $y' + ay = 0$, avec $a = 0,8$, donne :

$y(t) = Ce^{-0,8t}$, où $C \in \mathbb{R}$.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $y(t) = Ce^{-0,8t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

**Question 1. b. Vérifier que la fonction g définie par g(t) = 5 est une solution de l’équation différentielle y' + 0,8y = 4.**

Comme $g(t) = 5$ est constante, $g'(t) = 0$. Ainsi, $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$ : $g$ est bien une solution de l’équation.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $g(t) = 5$ est solution de $y' + 0,8y = 4$.

**Question 1. c. Déduire l’ensemble des solutions de l’équation différentielle y' + 0,8y = 4.**

Les solutions de l’équation complète s’obtiennent en ajoutant une solution particulière, $g(t) = 5$, aux solutions de l’équation homogène.

Donc $y(t) = 5 + Ce^{-0,8t}$, où $C \in \mathbb{R}$.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $y(t) = 5 + Ce^{-0,8t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

**Question 2. Déterminer la solution f de l’équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.**

Dans la famille trouvée, $f(0) = 5 + C = 20$, donc $C = 15$. La solution qui vérifie la condition initiale est :

$f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

## Partie B - Étude de la fonction f

**Question 1. a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.**

Lorsque $t \to +\infty$, $e^{-0,8t} \to 0$. Dans $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, le terme exponentiel tend donc vers zéro et il reste 5.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

**Question 1. b. Déduire de cette limite que la courbe représentative C admet une asymptote, puis en donner une équation.**

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ étant égale à 5, la courbe se rapproche d'une droite horizontale :

$$y = 5$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 5$.

**Question 2. À partir de l'expression donnée de f'(t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.**

Sur $[0; +\infty[$, l'exponentielle est positive, donc $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. La fonction décroît de $f(0) = 20$ vers sa limite 5.

| $t$ | **0** | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(t)$ | $-$ | |
| $f(t)$ | 20 | $\searrow$ 5 |

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f$ est strictement décroissante de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

**Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.**

La vitesse décroît, mais elle tend vers $5\ \mathrm{m\cdotps^{-1}}$, et non vers zéro. Elle reste donc positive : selon ce modèle, le chariot ne s'arrête pas.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non, le chariot ne s'arrête pas : sa vitesse tend vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

---

**Question 4. a. Vérifier que F(t) = −18,75e^{−0,8t} + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

En dérivant $F$, on obtient :

$$F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t).$$

Donc $F$ est une primitive de $f$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$F'(t) = f(t) = 15e^{-0,8t} + 5.$

---

**Question 4. b. Calculer la distance parcourue par le chariot entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$. Donner la valeur exacte, puis une valeur arrondie au centimètre.**

Par le théorème fondamental, $d = F(1) - F(0) = 23,75 - 18,75e^{-0,8} \approx 15,3251\ \mathrm{m}$. Au centimètre près, la distance est $15,33\ \mathrm{m}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$d = 23,75 - 18,75e^{-0,8} \approx 15,33\ \mathrm{m}.$

---

## Partie C - Étude locale

**Question 1. Choisir parmi les propositions le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.**

Le logiciel donne le terme d'ordre 2 $\frac{24}{5}t^2 = 4,8t^2$. Le reste doit être de la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

La troisième proposition est la bonne.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0.$

---

**Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.**

L'équation de la tangente en $t = 0$ est $y = f(0) + f'(0)t$. Comme $f(0) = 20$ et $f'(0) = -12$, on obtient $T : y = 20 - 12t$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$T : y = 20 - 12t$.

## 2. Transformées de Laplace d’un système électrique entrée-sortie

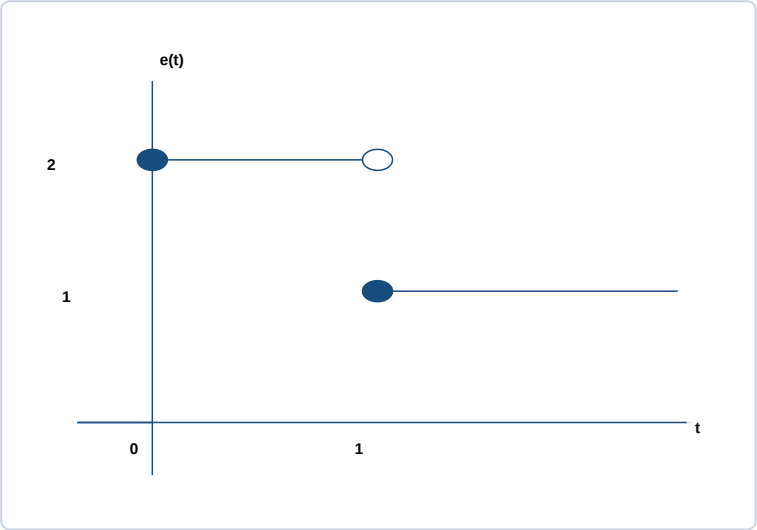
Un système électrique reçoit le signal causal e(t) = 2U(t) − U(t − 1) et produit un signal de sortie s(t), avec une fonction de transfert donnée. L’exercice porte sur les transformées de Laplace, la détermination de la sortie et la représentation des signaux sur le document-réponse.

### Partie A - Signal d’entrée

**Question 1. Tracer sur le document-réponse la courbe représentative de la fonction e(t).**

Comme $e(t) = 2U(t) − U(t − 1)$ et que $U(t) = 1$ pour $t \geq 0$, le signal est nul avant 0. De 0 inclus à 1 exclu, il vaut 2. À partir de 1, les deux échelons valent 1, donc le signal vaut 1. Les valeurs aux instants de saut sont donc $e(0) = 2$ et $e(1) = 1$. Le tracé représente ces niveaux avec des points pleins aux valeurs effectivement prises.

**Courbe du signal d’entrée e(t)**




> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $e(t) = 0$ si $t < 0$, $e(t) = 2$ si $0 \leq t < 1$, et $e(t) = 1$ si $t \geq 1$.

**Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d’entrée.**

Par linéarité, on transforme séparément les deux termes de $e(t) = 2U(t) − U(t − 1)$. Le formulaire donne $\mathcal{L}(U(t)) = 1/p$ et $\mathcal{L}(U(t − 1)) = e^{-p}/p$. On multiplie ces transformées par les coefficients 2 et −1 de l’entrée. Enfin, on peut regrouper les deux fractions en une seule. Pour $p > 0$, on obtient ainsi la transformée cherchée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(p) = (2 − e^{-p})/p$, pour $p > 0$.

## Partie B - Signal de sortie

**Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] − [1/(p(p + 1))]e⁻ᵖ.**

La relation entrée-sortie du système est $S(p) = H(p)E(p)$. L'énoncé donne $H(p) = 1/(p + 1)$, et la question précédente fournit $E(p) = 2/p - e^{-p}/p$. En remplaçant dans la relation, puis en distribuant le facteur $1/(p + 1)$, on obtient l'expression demandée :

$$S(p) = \frac{1}{p+1}\left(\frac{2}{p} - \frac{e^{-p}}{p}\right) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $S(p) = 2/[p(p + 1)] - e^{-p}/[p(p + 1)]$.

**Question 2. Vérifier que 1/[p(p + 1)] = 1/p − 1/(p + 1).**

Pour vérifier l'égalité, on réduit les deux fractions du membre de droite au dénominateur commun $p(p + 1)$. Le numérateur obtenu est $(p + 1) - p$, qui se simplifie en 1. On retrouve donc bien le membre de gauche. L'identité est valable lorsque les expressions sont définies, c'est-à-dire pour $p \neq 0$ et $p \neq -1$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1)$, pour $p \neq 0, -1$.

**Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, 1/(p + 1), (1/p)e⁻ᵖ et [1/(p + 1)]e⁻ᵖ.**

Les deux premières inverses se lisent dans le formulaire. Pour les deux dernières, la propriété de retard indique que multiplier une transformée par $e^{-p}$ revient à retarder le signal d'une unité : on remplace alors $t$ par $t - 1$ et on multiplie par $U(t - 1)$. Voici les quatre transformées inverses, dans l'ordre de l'énoncé :

| Transformée | Transformée inverse |
|---|---|
| 1/p | U(t) |
| 1/(p + 1) | $e^{-t}U(t)$ |
| $e^{-p}/p$ | U(t − 1) |
| $e^{-p}/(p + 1)$ | $e^{-(t-1)}U(t - 1)$ |

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Dans l'ordre : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t - 1)$, $e^{-(t-1)}U(t - 1)$.

**Question 4.** **Déduire l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.**

La décomposition en éléments simples est $1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1)$. Le premier terme de $S(p)$ a donc pour transformée inverse $2(1 - e^{-t})U(t)$. Le second terme est multiplié par $e^{-p}$ : son inverse est retardée d'une unité et contient $U(t - 1)$. Pour $0 \leq t < 1$, ce second terme est nul. Il ne reste alors que le premier.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour $0 \leq t < 1$ : $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

**Question 5. a.** **Sachant que $s(t) = (e - 2)e^{-t} + 1$ sur [1 ; +∞[, calculer s(1) et donner la valeur exacte, puis une valeur approchée au dixième.**

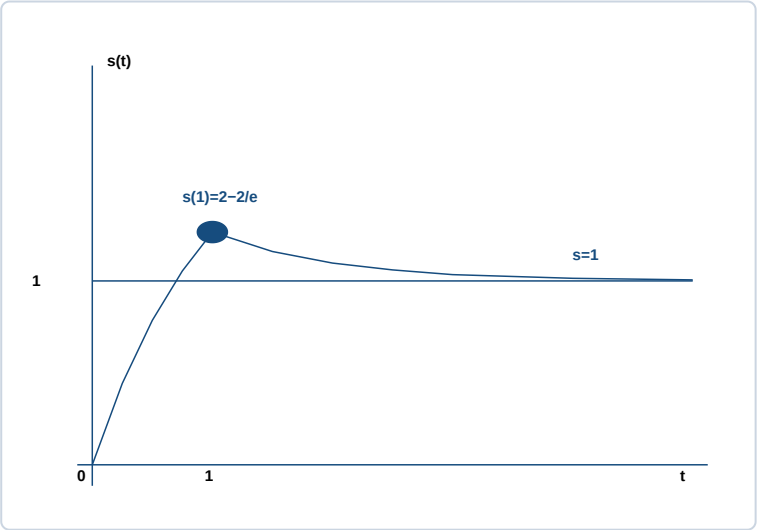
On remplace $t$ par 1 dans l'expression valable pour $t \geq 1$ : $s(1) = (e - 2)e^{-1} + 1$. Comme $e^{-1} = 1/e$, on simplifie : $s(1) = (e - 2)/e + 1 = 2 - 2/e$. Avec $e \approx 2{,}71828$, cette valeur est environ 1,264. Arrondie au dixième, elle vaut 1,3.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $s(1) = 2 - 2/e \approx 1{,}3$ au dixième.

**Question 5. b.** **Compléter sur le document-réponse la courbe représentative de la fonction s.**

Pour $0 \leq t \leq 1$, la sortie suit $2(1 - e^{-t})$ et croît de 0 à $2 - 2/e$. Pour $t \geq 1$, elle suit $1 + (e - 2)e^{-t}$ et décroît vers 1. Les deux expressions donnent la même valeur en $t = 1$, donc la courbe se raccorde sans saut. Le dessin représente ces deux branches ainsi que l'asymptote horizontale $s = 1$.

**Courbe de sortie s(t)**




> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La courbe croît jusqu'au point $(1 ; 2 - 2/e)$, puis décroît vers l'asymptote $s = 1$.

**Question 5. c. Donner la limite de s(t) lorsque t tend vers +∞.**

Pour $t \geq 1$, l'expression de sortie est $s(t) = 1 + (e - 2)e^{-t}$. Quand $t$ tend vers $+\infty$, le facteur exponentiel $e^{-t}$ tend vers 0. Le coefficient $e - 2$ étant constant, le produit $(e - 2)e^{-t}$ tend également vers 0. Il reste donc la constante 1, qui est aussi l'asymptote horizontale de la courbe.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim_{t \to +\infty} s(t) = 1$.

# Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

**Bilan de l'épreuve :** L'épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, porte le code 22MATGRB2 et dure deux heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Elle étudie le freinage d'un chariot et un système électrique, évaluant équations différentielles, étude de fonctions, intégration, développements limités et transformées de Laplace.

### Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- La solution de $y' + ay = 0$ est $y(t) = ke^{-at}$ ; une solution particulière constante de $y' + 0{,}8y = 4$ est $g(t) = 5$.
- Pour $f(t) = 15e^{-0{,}8t} + 5$, la limite en $+\infty$ vaut 5 et la courbe admet l'asymptote horizontale $y = 5$.
- La distance parcourue entre deux instants est l'intégrale de la vitesse sur l'intervalle : $d = \int f(t)\,dt$.
- La transformée de Laplace de $U(t - a)$ est $e^{-ap}/p$ ; un retard $f(t - a)U(t - a)$ ajoute le facteur $e^{-ap}$.

### Points de vigilance & attentes du jury

- Écrire la solution générale de l'équation différentielle avant d'appliquer la condition initiale.
- Interpréter la limite de la vitesse : ici, elle vaut 5 $m \cdot s^{-1}$, donc le modèle ne prévoit pas un arrêt.
- Pour la distance, évaluer la primitive aux deux bornes dans le bon ordre et arrondir au centimètre.
- Dans les calculs de Laplace, appliquer correctement le facteur de retard et respecter les intervalles de définition.

## Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

**Q : Comment trouver la solution de l'équation différentielle avec la vitesse initiale ?**

On ajoute une solution particulière de l'équation complète à la solution générale de l'équation homogène. On obtient $f(t) = 5 + ke^{-0{,}8t}$, puis on utilise la condition $f(0) = 20$ pour déterminer $k$.

**Q : Comment savoir si le chariot s'arrête selon le modèle ?**

On étudie la vitesse lorsque le temps tend vers l'infini. Ici, $f(t)$ tend vers 5 $m \cdot s^{-1}$ : elle ne tend pas vers zéro. Le modèle ne prévoit donc pas que le chariot s'arrête.

**Q : Comment organiser le temps pour cette épreuve de deux heures ?**

Les deux exercices valent chacun 10 points. Répartissez le temps entre eux et gardez une marge pour les tracés du document-réponse, les calculs exacts, les arrondis demandés et la vérification des unités.

**Q : Le coefficient est-il identique pour toutes les spécialités indiquées ?**

Non. Le sujet indique un coefficient de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Il demande aussi de tracer les signaux concernés sur le document-réponse.

**Sujet officiel associé (PDF) :** https://bts-mos.fr/assets/annales/bts-mos/E2 - Mathématiques/2022/BTS MOS - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

**Ressources BTS Management Opérationnel de la Sécurité :** Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.