Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du BTS MOS, veuillez visiter :
bts-mos.fr/annales-sujets-et-corriges

Épreuve de mathématiques - Groupement B

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf pour la spécialité Traitement des matériaux : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Modélisation du freinage d'un chariot par une fonction exponentielle** (12 questions) — **Page 3**
2. **Probabilités, durée de vie et estimation d'une proportion** (9 questions) — **Page 7**
3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://bts-mos.fr/assets/annales/bts-mos/E2 - Mathématiques/2022/BTS MOS - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Modélisation du freinage d'un chariot par une fonction exponentielle

Un chariot de fête foraine roule à 20 m·s⁻¹ avant d'être ralenti par un système de freinage. Sa vitesse est modélisée par une fonction vérifiant une équation différentielle, puis étudiée à l'aide de limites, de variations, d'une intégrale et d'un développement limité.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : y' + 0,8y = 0.

On applique la formule fournie pour une équation homogène de la forme $y' + ay = 0$: ses solutions sont $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. Ici, $a = 0,8$. En remplaçant a par cette valeur, on obtient toutes les solutions sur l'intervalle étudié $[0; +[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. La fonction g est définie sur [0 ; +∞[par g(t) = 5. Vérifier que g est solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

La fonction g est constante, donc sa dérivée est nulle. Vérifions le membre de gauche de l'équation (E) :

$g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. Cette égalité étant vraie pour tout $t \in [0; +[$, la fonction g satisfait bien l'équation différentielle demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g'(t) + 0,8g(t) = 4$, donc g est solution de (E).

Question 1.c. Déduire de la question précédente l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

1. Une solution particulière de (E) est $g(t) = 5$.
2. Les solutions de l'équation homogène associée sont $ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.
3. On additionne la solution particulière et les solutions homogènes pour obtenir l'ensemble des solutions de (E).

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

D'après la question précédente, une solution de (E) s'écrit $f(t) = 5 + ke^{-0,8t}$. La condition initiale impose $f(0) = 20$. Comme $e^0 = 1$, on a $5 + k = 20$, donc $k = 15$. La substitution de cette constante dans la solution générale donne la fonction recherchée sur $[0; +[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. On admet que f(t) = 15e$^{-0,8t}$ + 5 pour t ∈ [0 ; +∞[. Démontrer que la limite de f(t), lorsque t tend vers +∞, est égale à 5.

Lorsque $t \to +$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$. Par conséquent, $e^{-0,8t}$ tend vers 0, et le produit $15e^{-0,8t}$ tend également vers 0.

Dans l'expression $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, le terme restant tend donc vers 5. C'est la limite de la fonction lorsque le temps tend vers l'infini.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +} f(t) = 5$.

Question 1.b. Déduire de la limite précédente que la courbe C admet une asymptote, et en donner une équation.

La limite de $f(t)$ lorsque $t \to +$ est le nombre réel 5. La courbe représentative admet donc une asymptote horizontale en $+\infty$.

- Nature : asymptote horizontale.
- Équation : $y = 5$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. En utilisant l'expression donnée f'(t) = −12e$^{-0,8t}$, dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle est strictement positive. Ainsi, $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$ et f est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$ et sa limite en $+\infty$ vaut 5. Le tableau de variation est donc :

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow 5$

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît de 20 vers 5 sur $[0;+[$.

Question 3. Le système de freinage permet-il au chariot de s'arrêter ?

Le chariot s'arrête si sa vitesse atteint 0. Or, pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$. La vitesse reste ainsi strictement positive, même si elle décroît et se rapproche de 5 m·s⁻¹.

- La vitesse n'atteint jamais 0 dans ce modèle.
- Le système de freinage ne permet donc pas l'arrêt du chariot.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : la vitesse tend vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ sans s'annuler.

Question 4.a. La fonction F est définie sur [0 ; +∞[par F(t) = −18,75e^(−0,8t) + 5t. Vérifier que F est une primitive de f sur cet intervalle.

On dérive la fonction proposée en appliquant la dérivation d'une exponentielle composée et celle de $5t$:

$F'(t) = -18,75 \times (-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5.$

Cette dérivée est égale à $f(t)$ pour tout $t \in [0;+[$. Par définition, F est donc une primitive de f sur cet intervalle.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$.

Question 4.b. La distance d parcourue entre les instants t₀ et t₁ est donnée par d = ∫_{t₀}^{t₁} f(t)dt. Calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre t₀ = 0 et t₁ = 1, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

La distance est l'intégrale de la vitesse entre 0 et 1. Avec la primitive donnée, on calcule $d = F(1) - F(0)$. Or $F(1) = -18,75e^{-0,8} + 5$ et $F(0) = -18,75$, d'où :

$$d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}\ \mathrm{m} \approx 15,3251\ \mathrm{m}.$$

Arrondie au centimètre, cette distance vaut 15,33 m.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}\ \text{m} \approx 15,33\ \text{m}.$

Partie C - Étude locale

Question 1. Choisir, parmi les propositions, le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte. Recopier la réponse choisie ; aucune justification n'est demandée. Une réponse fausse, multiple ou absente ne rapporte ni n'enlève de point.

Le développement limité à l'ordre 2 est donné par la partie régulière affichée dans le sujet : $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Pour un développement limité d'ordre 2, le reste s'écrit sous la forme $t^2\varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. Il faut donc choisir la proposition qui réunit ces termes et ce reste, soit la troisième proposition.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Troisième proposition : $f(t) = 20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

La tangente à la courbe au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f(0) + f'(0)(t - 0)$. La condition initiale donne $f(0) = 20$. L'expression de la dérivée fournie dans le sujet donne $f'(0) = -12e^0 = -12$. En remplaçant ces deux valeurs dans l'équation de la tangente, on obtient l'équation demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$T : y = 20 - 12t.$

2. Probabilités, durée de vie et estimation d'une proportion

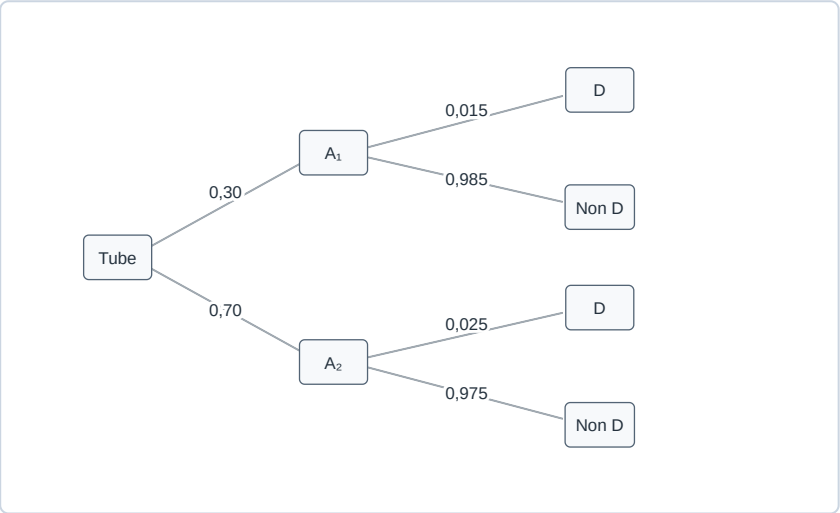
Une usine produit des tubes fluorescents dans deux ateliers et contrôle la présence de défauts ainsi que leur durée de fonctionnement. L'exercice étudie aussi la proportion de rivets conformes à partir d'un échantillon de 1 000 rivets.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Réaliser un arbre pondéré décrivant la situation de production des tubes dans les deux ateliers et la présence éventuelle d'un défaut.

On sépare d'abord les tubes selon leur atelier d'origine, puis selon la présence ou non d'un défaut. Les premières branches portent les parts de production : 30 % pour l'atelier 1 et 70 % pour l'atelier 2. Les branches suivantes donnent les probabilités conditionnelles de défaut, 1,5 % et 2,5 %, ainsi que leurs probabilités complémentaires.

Atelier de production et présence d'un défaut



Probabilités des branches conditionnelles.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Arbre pondéré représenté ci-dessous.

Question 2. Calculer la probabilité P(A₁ ∩ D), où A₁ désigne l'événement « le tube provient de l'atelier 1 » et D l'événement « le tube présente un défaut ».

Pour obtenir la probabilité qu'un tube provienne de l'atelier 1 et soit défectueux, on multiplie la part de production de cet atelier par la probabilité conditionnelle d'un défaut dans cet atelier. Ainsi, d'après les données de l'énoncé, $P(A_1 \cap D) = P(A_1) \times P(D \mid A_1) = 0,30 \times 0,015 = 0,0045$. Cette probabilité représente 0,45 % de la production totale.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_1 \cap D) = 0,0045$, soit 0,45 %.

Question 3. Montrer que la probabilité qu'un tube prélevé au hasard présente un défaut est P(D) = 0,022.

Les deux ateliers couvrent toute la production. La probabilité d'un défaut s'obtient donc en additionnant les probabilités de défaut de chaque atelier, pondérées par leurs parts de production. On applique la formule des probabilités totales : $P(D) = P(A_1)P(D \mid A_1) + P(A_2)P(D \mid A_2)$. Le calcul donne $0,30 \times 0,015 + 0,70 \times 0,025 = 0,022$, soit 2,2 %.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(D) = 0,022$, soit 2,2 %.

Question 4. Sachant que le tube prélevé ne présente pas de défaut, calculer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.

On cherche la probabilité de provenir de l'atelier 2 sachant que le tube n'a pas de défaut. La probabilité conjointe correspondante est $P(A_2 \cap \overline{D}) = 0,70 \times 0,975 = 0,6825$. La probabilité d'absence de défaut vaut $1 - 0,022 = 0,978$. On divise la probabilité conjointe par cette probabilité conditionnante : $P(A_2 \mid \overline{D}) = 0,6825/0,978$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A_2 \mid \overline{D}) \approx 0,698$, soit 69,8 %.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. La durée de bon fonctionnement T d'un tube fluorescent suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,001. Déterminer l'espérance E(T) et interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.

Pour une loi exponentielle de paramètre λ, l'espérance est $E(T) = 1/\lambda$. La page originale indique $\lambda = 0,0001$ par heure. Ainsi, $E(T) = 1/0,0001 = 10\,000$ heures. Cette valeur représente la durée moyenne de bon fonctionnement prévue par le modèle ; elle ne garantit pas qu'un tube donné fonctionnera exactement 10 000 heures.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(T) = 10\,000$ heures.

Question 2. Calculer, avec un résultat arrondi à 10^{-2}, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube fluorescent prélevé soit inférieure à 8 000 heures.

La page donne $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ avec $\lambda = 0,0001$. En prenant $t = 8\,000$, on obtient $P(T < 8\,000) = 1 - e^{-0,0001 \times 8\,000} = 1 - e^{-0,8}$. Comme la loi exponentielle est continue, les probabilités d'obtenir une durée strictement inférieure ou inférieure ou égale à 8 000 heures sont identiques. Le résultat est arrondi au centième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T < 8\,000) \approx 0,55$.

Question 3. Calculer, avec un résultat arrondi à 10^{-2}, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube fluorescent prélevé soit supérieure à 10 000 heures.

La probabilité qu'une durée dépasse t est le complément de la probabilité cumulée jusqu'à t, soit $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. Avec le paramètre de l'énoncé, $\lambda = 0,0001$, et $t = 10\,000$ heures, on calcule $P(T > 10\,000) = e^{-0,0001 \times 10\,000} = e^{-1}$. On arrondit ce résultat au centième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T > 10\,000) \approx 0,37$.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. Sur les 1 000 rivets prélevés, 975 sont conformes. Donner une estimation ponctuelle de la proportion inconnue p de rivets conformes dans l'ensemble de la production.

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue est la fréquence observée dans l'échantillon. Parmi les 1 000 rivets prélevés, 975 sont conformes. On calcule donc $f = 975/1\,000 = 0,975$. Cette fréquence, soit 97,5 %, est l'estimation ponctuelle de la proportion de rivets conformes dans l'ensemble de la production.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f = 0,975$, soit 97,5 %.

Question 2. Déterminer un intervalle de confiance centré sur la fréquence observée pour la proportion p de rivets conformes, au niveau de confiance de 95 %. Arrondir les bornes de l'intervalle à 10^{-3} près.

La formule imprimée dans le sujet donne l'intervalle $[f - 1,96\sqrt{f(1-f)/n}\,;\ f + 1,96\sqrt{f(1-f)/n}]$. Avec $f = 0,975$ et $n = 1\,000$, la marge vaut $1,96\sqrt{0,975 \times 0,025/1\,000} \approx 0,009677$. Les bornes non arrondies sont environ 0,965323 et 0,984677 ; arrondies au millième, elles donnent l'intervalle demandé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % : $[0,965\ ;\ 0,985]$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, Session 2022, porte le code 22MATGRB1 et dure 2 heures. Son coefficient est 2, sauf pour la spécialité Traitement des matériaux, où il est de 3. Les deux exercices étudient le freinage d'un chariot, les probabilités de défaut, la durée de vie des tubes fluorescents et l'estimation de la conformité de rivets.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, avec a non nul et b constant, les solutions sont la somme d'une solution de l'équation homogène et de la solution constante b/a.
- Si f(t) tend vers L lorsque t tend vers +∞, la courbe représentative de f admet l'asymptote horizontale y = L.
- Pour T suivant une loi exponentielle de paramètre λ, E(T) = 1/λ et P(T ≤ t) = 1 − e^(−λt).
- Pour une proportion, l'intervalle à 95 % fourni dans le sujet est f ± 1,96√(f(1 − f)/n), où f est la fréquence observée.

Points de vigilance & attentes du jury

- Dans l'arbre pondéré, inscrire les probabilités des ateliers puis les probabilités conditionnelles de défaut et d'absence de défaut.
- Distinguer une probabilité d'intersection d'une probabilité conditionnelle et appliquer la formule des probabilités totales.
- Pour une probabilité de dépassement, utiliser P(T > t) = 1 − P(T ≤ t) = e^(−λt).
- Dans l'intervalle de confiance, utiliser la fréquence et l'effectif de l'échantillon, puis respecter l'arrondi demandé.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment calculer la distance parcourue par le chariot entre deux instants ?

La distance entre t_0 et t_1 est l'intégrale de la vitesse : $d = \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt$. Avec une primitive F, calculez $F(t_1) - F(t_0)$. Ici, le sujet demande ensuite d'arrondir le résultat au centimètre.

Q : Comment calculer la probabilité que la durée de vie dépasse une valeur donnée ?

Pour une loi exponentielle de paramètre λ, P(T > t) = e^(−λt). Cette formule est le complément de P(T ≤ t) = 1 − e^(−λt). Dans cet exercice, λ vaut 0,001 et t est exprimé en heures.

Q : Combien de temps dure l'épreuve et comment les points sont-ils répartis ?

L'épreuve dure 2 heures et comporte deux exercices notés chacun sur 10 points. Le premier porte sur le freinage d'un chariot et le second sur les probabilités, la durée de vie des tubes et l'intervalle de confiance.

Q : Quels arrondis et critères de présentation faut-il respecter dans cet énoncé ?

Arrondissez la distance au centimètre, les probabilités de durée de vie à 10^{-2} et les bornes de l'intervalle à 10^{-3}. Présentez les étapes utiles et indiquez les unités lorsqu'elles sont pertinentes.

Sujet officiel associé (PDF) : https://bts-mos.fr/assets/annales/bts-mos/E2 - Mathématiques/2022/BTS MOS - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS Management Opérationnel de la Sécurité : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.