Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du BTS MOS, veuillez visiter :
bts-mos.fr/annales-sujets-et-corriges

Mathématiques

Session 2018 • Code sujet : **MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Selon la spécialité : 1, 1,5, 2, 2,5 ou 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Départ d'un train à propulsion électromagnétique et aire d'une pièce de gare** (13 questions) — **Page 3**

2. **Obsolescence programmée des smartphones : probabilités, loi binomiale et test d'hypothèse** (13 questions) — **Page 7**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 12**

Sujet officiel (PDF) : https://bts-mos.fr/assets/annales/bts-mos/E2 - Mathématiques/2018/BTS MOS - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf

1. Départ d'un train à propulsion électromagnétique et aire d'une pièce de gare

L'exercice modélise la distance parcourue par un wagon à très haute vitesse au moyen d'une équation différentielle puis d'une fonction exponentielle. Il étudie les variations et la vitesse du wagon, puis calcule l'aire hachurée d'une pièce destinée aux gares à partir de son graphique et d'une fonction.

A. Résolution d'une équation différentielle

Question 1°. Résoudre sur [0, +∞[l'équation différentielle homogène y' - 0,2y = 0, à l'aide de la formule fournie.

On écrit l'équation sous la forme fournie $y' + ay = 0$, avec $a = -0,2$. La formule donne alors $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. Les solutions sont définies sur l'intervalle demandé $[0, +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{0,2t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2°. Vérifier que la fonction g définie sur [0, 3] par g(t) = -15t - 75 est une solution de l'équation différentielle y' - 0,2y = 3t.

On dérive g : $g'(t) = -15$. En substituant dans le membre de gauche de l'équation, on obtient $g'(t) - 0,2g(t) = -15 - 0,2(-15t - 75) = 3t$. Ce résultat étant égal au membre de droite, la fonction proposée vérifie bien l'équation différentielle sur $[0, 3]$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g'(t) - 0,2g(t) = 3t$: g est une solution de (E).

Question 3°. Déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' - 0,2y = 3t.

Les solutions de l'équation différentielle complète s'obtiennent en ajoutant à une solution particulière les solutions de l'équation homogène. La fonction particulière est $g(t) = -15t - 75$, et les solutions homogènes sont $ke^{0,2t}$. On réunit ces deux expressions pour obtenir l'ensemble des solutions.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{0,2t} - 15t - 75$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 4°. Déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle, sachant que le wagon est au point de départ à t = 0 et que f(0) = 0.

La solution générale s'écrit $y(t) = ke^{0,2t} - 15t - 75$. La condition initiale impose $f(0) = k - 75 = 0$, donc $k = 75$. En remplaçant cette constante dans la solution générale, on obtient la fonction modélisant la distance parcourue par le wagon.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 75(e^{0,2t} - 1) - 15t$.

B. Étude de fonction et application

Question 1° a). À partir des expressions de f et de f' fournies par le logiciel de calcul formel, résoudre sur [0, 3] l'inéquation f'(t) ≥ 0.

D'après l'expression fournie, $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15 = 15(e^{0,2t} - 1)$. Pour $t \in [0, 3]$, l'exponentielle vérifie $e^{0,2t} \geq 1$. La dérivée est donc nulle en $t = 0$, puis positive sur le reste de l'intervalle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 3]$.

Question 1° b). Déduire de la question précédente les variations de la fonction f sur l'intervalle [0, 3].

t	**0**	**3**
Signe de $f'(t)$	0	+
Variation de f	0	$75(e^{0,6} - 1) - 45 \approx 16,659$

Comme la dérivée est positive sur $[0, 3]$, la fonction est croissante sur cet intervalle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f croît de 0 à environ $16,659$ km sur $[0, 3]$.

Question 2°. Déterminer le nombre de kilomètres parcourus par le wagon au bout d'une minute et arrondir le résultat au dixième.

Au bout d'une minute, on évalue la fonction distance en $t = 1$: $f(1) = 75(e^{0,2} - 1) - 15 \approx 1,6052$. La distance est exprimée en kilomètres. En arrondissant au dixième, on obtient la valeur demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$1,6$ km.

Question 3° a). Sachant que la vitesse du wagon à l'instant t est donnée par f'(t), déterminer sa vitesse à t = 2 minutes et arrondir au dixième de kilomètre par minute.

La vitesse instantanée est donnée par $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$, en kilomètres par minute. À $t = 2$, on calcule $f'(2) = 15(e^{0,4} - 1) \approx 7,3774$. L'arrondi au dixième de kilomètre par minute est donc $7,4$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$7,4$ km/min.

Question 3° b). Indiquer si l'objectif des ingénieurs est atteint et justifier la réponse au regard de la vitesse visée en moins de deux minutes.

La vitesse visée, 400 km/h, correspond à $400/60 \approx 6,667$ km/min. En résolvant $15(e^{0,2t} - 1) = 400/60$, on trouve $t = 5\ln(13/9) \approx 1,839$ minute. Le seuil est donc atteint avant deux minutes.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Oui : le seuil de 400 km/h est atteint après environ $1,839$ min, donc en moins de 2 min.

Question 4°. Parmi les trois propositions, recopier l'équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 2. Aucune justification n'est demandée.

La formule de la tangente en $t = 2$ est $y = f'(2)(t - 2) + f(2)$. Avec $f'(2) = 15(e^{0,4} - 1)$ et $f(2) = 75e^{0,4} - 105$, la simplification donne la troisième proposition.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y = 15(e^{0,4} - 1)t + 45e^{0,4} - 75$.

C. Calcul intégral

Question 1°. À partir du graphique de la pièce, choisir l'aire A1 du rectangle OPQR parmi les trois valeurs proposées.

Sur le graphique, le rectangle $OPQR$ a pour largeur $OP = 3$ et pour hauteur $OR = 2,25$. Son aire vaut donc $3 \times 2,25 = 6,75$ unités d'aire. Parmi les trois choix proposés, c'est la valeur correspondante qu'il faut sélectionner.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$A_1 = 6,75$ u. a.

Question 2°. En exploitant la primitive fournie, calculer l'aire A2 de la partie du plan limitée par la courbe de g(x) = 27x/(2x² + 18), l'axe des abscisses et les droites x = 0 et x = 3.

La fonction g est positive sur $[0, 3]$, donc l'aire cherchée est son intégrale. Avec la primitive fournie, on calcule $A_2 = \left[\frac{27}{4}\ln(x^2+9)\right]_0^3$. La différence des bornes donne $\frac{27}{4}\ln 2 \approx 4,679$ unités d'aire.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$A_2 = \frac{27}{4}\ln 2 \approx 4,679$ u. a.

Question 3°. À partir des questions précédentes, de la symétrie de la pièce par rapport à l'axe des ordonnées et du graphique, déduire l'aire hachurée A et l'arrondir au millième.

Sur la moitié droite, l'aire hachurée est l'aire du rectangle moins celle située sous la courbe, soit $A_1 - A_2$. La pièce étant symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, on double cette différence : $A = 2(A_1 - A_2)$. L'unité graphique étant le mètre, l'aire s'exprime en mètres carrés.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$A = 2\left(6,75 - \frac{27}{4}\ln 2\right) \approx 4,143$ m².

2. Obsolescence programmée des smartphones : probabilités, loi binomiale et test d'hypothèse

L'exercice étudie l'obsolescence technique et logicielle de smartphones à partir de données observées sur 200 appareils. Il examine aussi la réparabilité d'un lot de smartphones de modèle A et teste, sur un échantillon, la proportion annoncée dans un sondage au sujet de la marque B.

A. Probabilités conditionnelles

Question 1°. À partir des données sur les obsolescences technique et logicielle, compléter le tableau d'effectifs pour les 200 smartphones.

Smartphones	Touchés par L	Non touchés par L	Total
Touchés par T	2	4	6
Non touchés par T	14	180	194
Total	16	184	200

Les effectifs touchés par T et L sont respectivement 200 × 0,03 = 6 et 200 × 0,08 = 16. Parmi les 16 smartphones touchés par L, 12,5 % sont aussi touchés par T, soit 2. On complète ensuite chaque ligne et chaque colonne à partir de ses totaux : 4 sont touchés par T seulement, 14 par L seulement et 180 par aucune des deux obsolescences.

Tableau d'effectifs complété

Smartphones	touchés par l'obsolescence logicielle	non touchés par l'obsolescence logicielle	Total
touchés par l'obsolescence technique	2	4	6
non touchés par l'obsolescence technique	14	180	194
Total	16	184	200

✓ RÉPONSE À RETENIR

Effectifs : 2, 4, 14 et 180. Totaux : 6, 16, 194, 184 et 200.

Question 2°. Donner P(T), P(L) et P_L(T), où T désigne l'obsolescence technique et L l'obsolescence logicielle.

Les taux indiqués dans l'énoncé donnent directement les probabilités des événements T et L. La notation $P_L(T)$ signifie que l'on se restreint aux smartphones touchés par L et que l'on cherche la proportion de ceux qui sont aussi touchés par T. Cette probabilité conditionnelle est également fournie directement. Il ne faut pas la confondre

avec P(T), calculée sur l'ensemble des 200 smartphones.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> P(T) = 0,03 ; P(L) = 0,08 ; $P_L(T)$ = 0,125.

Question 3° a). Calculer P(T ∩ L), la probabilité qu'un smartphone soit touché à la fois par l'obsolescence technique et par l'obsolescence logicielle.

Parmi les smartphones touchés par L, la proportion également touchée par T est 0,125. Pour obtenir la proportion de smartphones touchés à la fois par T et L dans toute la population, on multiplie par la probabilité de L : P(T ∩ L) = P(L) × $P_L(T)$ = 0,08 × 0,125. Cette intersection correspond à 2 smartphones sur 200.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> P(T ∩ L) = 0,01.

Question 3° b). Calculer P(T ∪ L), la probabilité qu'un smartphone soit touché par l'obsolescence technique ou par l'obsolescence logicielle.

L'événement T ∪ L comprend les smartphones touchés par au moins l'une des deux obsolescences. En additionnant P(T) et P(L), les appareils appartenant à T ∩ L sont comptés deux fois : il faut donc retrancher leur probabilité une fois. Ainsi, P(T ∪ L) = 0,03 + 0,08 − 0,01. Cela représente la proportion de smartphones présentant au moins un des deux types d'obsolescence.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> P(T ∪ L) = 0,10.

Question 3° c). Calculer P_T(L), la probabilité d'obsolescence logicielle sachant que le smartphone est touché par l'obsolescence technique.

La probabilité conditionnelle de L sachant T est le rapport entre la probabilité de l'intersection et celle de T : $P_T(L)$ = P(T ∩ L) / P(T) = 0,01 / 0,03. Le résultat, arrondi au millième comme demandé dans l'exercice, est 0,333. Autrement dit, environ un smartphone sur trois parmi ceux touchés par l'obsolescence technique est aussi touché par l'obsolescence logicielle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P_T(L)$ ≈ 0,333, soit 33,3 %.

B. Loi binomiale

Question 1°. Justifier que la variable aléatoire X, qui compte les smartphones non réparables dans un lot de 50, suit une loi binomiale et en déterminer les paramètres.

Chaque prélèvement est une épreuve de Bernoulli : le smartphone est non réparable avec une probabilité constante de 0,045. Le stock étant suffisamment important pour assimiler les prélèvements à des tirages avec remise, les 50 épreuves sont indépendantes. La variable X compte le nombre de smartphones non réparables parmi ces 50 épreuves. Elle suit donc une loi binomiale de paramètres n = 50 et p = 0,045.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> X suit la loi binomiale de paramètres n = 50 et p = 0,045.

Question 2°. Calculer la probabilité que les 50 smartphones prélevés soient tous réparables.

Les 50 smartphones sont tous réparables si aucun n'est non réparable. Pour un prélèvement, la probabilité d'être réparable vaut 1 − 0,045 = 0,955. Les prélèvements étant assimilés à des tirages indépendants, la probabilité que cette condition soit satisfaite pour les 50 appareils est $0{,}955^{50}$. On arrondit le résultat au millième, conformément à la consigne de l'exercice.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité que les 50 smartphones soient réparables est 0,100.

Question 3° a). Faire tourner l'algorithme à la main et compléter le tableau avec les valeurs de P(X = i) et les valeurs successives de S pour i allant de 0 à 3.

À chaque étape, l'algorithme ajoute P(X = i) à la somme S. Les probabilités et les sommes cumulées ci-dessous sont arrondies au millième. Pour i = 0, S vaut déjà 0,100 comme indiqué dans le tableau du sujet ; les colonnes suivantes ajoutent successivement les probabilités pour i = 1, 2 et 3.

i	**0**	**1**	**2**	**3**
P(X = i)	0,100	0,236	0,272	0,205
S	0,100	0,336	0,608	0,813

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> P(X = i) : 0,100 ; 0,236 ; 0,272 ; 0,205. S : 0,100 ; 0,336 ; 0,608 ; 0,813.

Question 3° b). Donner la valeur de S à la fin de l'algorithme et interpréter le résultat.

La boucle additionne les probabilités correspondant à i = 0, 1, 2 et 3. Ainsi, à la fin de l'algorithme, S représente P(X ≤ 3), la probabilité qu'un lot contienne au plus trois smartphones non réparables. En utilisant les valeurs arrondies du tableau, on obtient S = 0,100 + 0,236 + 0,272 + 0,205. Cette probabilité est d'environ 81,3 %.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> S = 0,813 : environ 81,3 % des lots contiennent au plus trois smartphones non réparables.

Question 4°. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat.

Pour une loi binomiale de paramètres n et p, l'espérance est E(X) = np. Ici, E(X) = 50 × 0,045 = 2,25. Cela signifie que, sur un grand nombre de lots de 50 smartphones, le nombre moyen de smartphones non réparables par lot est 2,25. Cette moyenne théorique n'impose pas que chaque lot contienne exactement ce nombre.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> E(X) = 2,25 : en moyenne, 2,25 smartphones par lot sont non réparables.

C. Test d'hypothèse

Question 1°. Parmi les valeurs proposées, choisir la valeur approchée de h au centième telle que, sous H0, P(0,55 - h ≤ F ≤ 0,55 + h) = 0,95.

Sous H_0, la loi normale de F a pour moyenne 0,55 et pour écart type 0,037. Pour un intervalle central de 95 %, la demi-largeur vaut environ 1,96 fois l'écart type : h ≈ 1,96 × 0,037 = 0,07252. Arrondi au centième, h vaut 0,07. C'est la valeur correspondante parmi les choix proposés.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> h ≈ 0,07.

Question 2°. Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de signification de 5 %.

Au seuil de 5 %, on ne rejette pas H_0 lorsque la fréquence observée appartient à l'intervalle central de 95 % sous cette hypothèse. Avec h arrondi à 0,07, les bornes sont 0,55 − 0,07 et 0,55 + 0,07. Une fréquence située en dehors de cet intervalle conduit au rejet de H_0 au profit de H_1.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Ne pas rejeter H_0 si 0,48 ≤ f ≤ 0,62 ; sinon, rejeter H_0.

Question 3°. À partir des réponses de 76 personnes sur les 180 interrogées, formuler la conclusion du test.

La fréquence observée est f = 76 / 180 ≈ 0,422. Elle est inférieure à la borne basse 0,48 de l'intervalle de non-rejet établi à la question précédente. La fréquence observée se trouve donc dans la région de rejet. Au seuil de 5 %, l'échantillon conduit à rejeter l'hypothèse selon laquelle 55 % des Français pensent que la marque B pratique l'obsolescence programmée.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> On rejette H_0 : la proportion observée est significativement inférieure à 0,55.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2018)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, session 2018, groupement B, code MATGRB1, d'une durée de deux heures et à coefficient variable selon la spécialité. Les deux exercices, notés chacun sur 10 points, étudient le départ d'un train à propulsion électromagnétique et l'aire d'une pièce de gare, puis l'obsolescence des smartphones. Les compétences évaluées couvrent équations différentielles, étude de fonctions, intégrales, probabilités et test d'hypothèse.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- La solution générale d'une équation différentielle linéaire est la somme d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène.
- Si f décrit une distance en fonction du temps, f'(t) est la vitesse instantanée ; vérifier la cohérence des unités et de l'instant demandé.
- Pour X suivant une loi binomiale de paramètres n et p, E(X) = np et P(X = 0) = (1 - p)^n.
- L'aire sous une courbe positive sur [a, b] est l'intégrale de la fonction sur cet intervalle ; utiliser la symétrie lorsque la figure le permet.

Points de vigilance & attentes du jury

- Vérifier une solution particulière par substitution avant d'écrire la solution générale et d'appliquer la condition initiale.
- Ne pas confondre kilomètres parcourus et kilomètres par minute ; respecter l'instant et la précision d'arrondi demandés.
- Identifier l'événement conditionnant dans une probabilité conditionnelle et distinguer intersection, union et probabilité conditionnelle.
- Pour le test bilatéral, comparer la fréquence observée à l'intervalle de décision et conclure dans le contexte sans présenter H0 comme prouvée.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre une équation différentielle avec un second membre dans cet exercice ?

Résolvez d'abord l'équation homogène associée, puis ajoutez une solution particulière de l'équation complète. La condition initiale détermine la constante et permet d'obtenir la fonction correspondant au wagon.

Q : Comment interpréter f'(t) dans le modèle du wagon ?

La fonction f donne la distance parcourue en kilomètres selon le temps exprimé en minutes. Sa dérivée f'(t) représente donc la vitesse instantanée en kilomètres par minute, à l'instant t.

Q : Comment organiser le temps de cette épreuve ?

L'épreuve dure deux heures et comprend deux exercices de dix points. Les parties sont indépendantes, ce qui permet de passer à une autre partie si une question bloque, puis de réserver du temps aux calculs, aux unités et aux arrondis.

Q : Quelles précautions prendre pour les probabilités et le test d'hypothèse ?

Distinguez les événements et indiquez les probabilités utilisées. Arrondissez les résultats à 10^{-3} sauf consigne différente. Pour le test, énoncez la règle, comparez la fréquence observée à la zone de décision et concluez dans le contexte.

Sujet officiel associé (PDF) : https://bts-mos.fr/assets/annales/bts-mos/E2 - Mathématiques/2018/BTS MOS - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf
Ressources BTS Management Opérationnel de la Sécurité : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.